

**Tétel.** Legyen  $T$  egy tetszőleges test és  $m \in T[x]$  egy tetszőleges polinom. A  $T[x]/(m)$  maradékosztály-gyűrű akkor és csak akkor test, ha  $m$  irreducibilis  $T$  felett.

*Biz.* Először tfh.  $m$  irreducibilis. Tudjuk, hogy  $T[x]/(m)$  ..... gyűrű. Ennek a gyűrűnek legalább két eleme van; például ..... és ..... két olyan polinom, amelyek nem kongruensek modulo  $m$ . Be kell látnunk, hogy  $T[x]/(m)$  minden nemnulla elemének van ..... Legyen  $\bar{0} \neq \bar{f} \in T[x]/(m)$ . Ekkor  $m \nmid f$ , és így  $\text{lko}(f, m)$  ....., mert  $m$  ..... Az előadásvázlatbeli ..... szerint az  $\bar{f}$  maradékosztálynak van multiplikatív inverze. Ezzel beláttuk, hogy  $T[x]/(m)$  test.

Most tfh.  $m$  nem irreducibilis és  $m$  legalább elsőfokú. Ekkor vannak olyan  $f, g \in T[x]$  polinomok, amelyekre  $m = \dots\dots\dots$  és  $\deg f, \deg g \dots\dots\dots$ . Ebből következik, hogy  $\bar{f} \cdot \bar{g} = \dots\dots\dots$ , de  $\bar{f}, \bar{g} \dots\dots\dots$ . Ezek alapján  $\bar{f}$  és  $\bar{g} \dots\dots\dots$  a  $T[x]/(m)$  gyűrűben, és így nincs multiplikatív inverzük. Tehát  $T[x]/(m)$  nem test.

Hátravan még az az eset, amikor  $m \dots\dots\dots$  polinom. Ha  $m = 0$ , akkor két polinom akkor és csak akkor kongruens modulo  $m$ , ha ..... Ekkor tehát a  $T[x]/(m)$  gyűrű izomorf magával a  $T[x]$  gyűrűvel, ami nyilván nem test (például az ..... polinomnak nincs multiplikatív inverze). Végül, ha  $m \neq 0$ , akkor  $T[x]/(m)$  azért nem test, mert ..... □